Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 36 Punkte.

Aufgabe 1:

Für welche $p \in (0,\infty)$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}x = x^p \quad , \quad x(0) = 1$$

eine eindeutige Lösung, dessen maximales Lösungsintervall

a) $[0,\infty)$ enthält?

b) $(-\infty,0]$ enthält?

Aufgabe 2:

a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}x_1 = px_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = x_1 - px_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

in Polarkoordinaten (r,φ) mit $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$.

b) Bestimmen Sie die Werte des Parameters $p \in \mathbb{R}$, für die die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems asymptotisch stabil ist.
Zur Erinnerung: Eine Gleichgewichtslage x_s heißt *asymptotisch stabil*, falls für jede Umgebung U von x_s eine Umgebung $V \subset U$ von x_s existiert, so dass das Anfangswertproblem für alle $x \in V$ und alle $t \geq 0$ lösbar ist und die Lösungen $\varphi(t) \in U$ sind für $t \geq 0$, und eine Umgebung W von x_s existiert mit

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s \qquad \text{für alle} \qquad x(0) \in W.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = \cos(2t).$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-m-in)^3}$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert. Bestimmen Sie die Lage ihrer Polstellen!

b) Zeigen Sie, dass $f(-z) = -f(z)$ und für alle $\ell \in \mathbb{C}$ mit ganzzahligem Real- und Imaginärteil $f(z+\ell) = f(z)$ gilt.

Aufgabe 5:

Es sei c der Weg $c(t) := e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ und p das komplexe Polynom $p(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k$, mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und $p(\zeta) \neq 0$ für $|\zeta| \geq 1$.
Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_c \frac{1}{p\left(z^2\right)} dz.$$

Aufgabe 6:

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte die (ganze) Funktion

$$E_k(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{l=1}^{k} \frac{z^l}{l}\right).$$

Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$ gilt:

$$|E_k(z) - 1| \leq 4|z|^{k+1}.$$

Hinweis: Für $|z| < 1$ und den Hauptwert Log des Logarithmus gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l} = -\mathrm{Log}(1-z).$$