

**Thema Nr. 3****(Aufgabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

Drücken Sie das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{z^4} e^{1/z} dz$$

durch eine unendliche Reihe aus und berechnen Sie den Wert auf drei Nachkommaziffern genau. Beweisen Sie durch eine Abschätzung des Reihenrests, dass die berechneten Ziffern richtig sind!

**Aufgabe 2:**

Es sei  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$  das Äußere der Einheitskreisscheibe. Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $(f(z))^3 = z^3 - 1$ ? Gibt es eine holomorphe Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $(g(z))^4 = z^3 - 1$ ?

**Aufgabe 3:**

Es bezeichne  $\mathcal{J}$  die Menge aller ganzen Funktionen  $f$ , die  $f(k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen erfüllen. Ein Beispiel einer Funktion in  $\mathcal{J}$  ist

$$f(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi z)}{z^2 - 1}.$$

- a) Zeigen Sie, dass für beliebige  $f_1, f_2 \in \mathcal{J}$  und beliebige ganze Funktionen  $g$  auch  $f_1 + f_2 \in \mathcal{J}$  und  $gf_1 \in \mathcal{J}$  gilt. (Die Menge  $\mathcal{J}$  ist ein Ideal im Ring der ganzen Funktionen.)
- b) Zeigen Sie: Zu beliebigen  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{J}$  gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{J}$ , die sich nicht in der Gestalt  $f = \sum_{\nu=1}^n g_\nu f_\nu$  mit ganzen Funktionen  $g_1, \dots, g_n$  darstellen lässt. (Das Ideal  $\mathcal{J}$  ist nicht endlich erzeugt.)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Mit reellen Zahlen  $a, b, c$  sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jedes der beiden Differentialgleichungssysteme  $y' = Ay$  und  $y' = By$  eine Basis des Raumes der Lösungen an! Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten  $a, b, c$  an, so dass Folgendes gilt:

- i) Für alle Lösungen  $\varphi$  ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ .

Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für  $a, b, c$  an, so dass gilt:

- ii) Es existiert eine nicht-konstante periodische Lösung.

**Aufgabe 5:**

Auf  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - axy, \\ \dot{y} &= -y + bxy \end{aligned}$$

mit Konstanten  $a > 0$ ,  $b > 0$  gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H(x, y) = (bx - \log x) + (ay - \log y)$$

längs einer jeden Lösung des Systems konstant ist.

- b) Zeigen Sie: Für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in D$  ist die maximale Lösung  $\varphi$  des Systems mit dem Anfangspunkt  $\varphi(0) = (x_0, y_0)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, und sie ist periodisch.