

**Thema Nr. 1****(Aufabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

*Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu begründen.*

**Aufgabe 1 (6 Punkte)**

Man bestimme die möglichen Werte des Integrals

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$$

in den beiden folgenden Situationen:

- (i)  $\Gamma$  ist eine Kreislinie in  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ , die einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen wird;
- (ii)  $\Gamma$  ist eine beliebige stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ .

**Aufgabe 2 (6 Punkte)**

- a) Man zeige, dass es eine meromorphe Funktion  $f$  mit folgenden Eigenschaften gibt:
  - (i)  $f$  verschwindet in allen Punkten  $i\nu^2$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ;
  - (ii)  $f$  hat in allen Punkten  $\mu \in \mathbb{N}$  Polstellen erster Ordnung.
- b) Kann man überdies sogar erreichen, dass das Residuum der in (a) konstruierten Funktion  $f$  in allen Polstellen  $\mu \in \mathbb{N}$  gleich 1 ist? (Begründung!)

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**

Sei  $\alpha$  ein Winkel mit  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  und sei

$$W_{\alpha} := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid z = |z|e^{it} \text{ mit } |t| < \alpha\}.$$

$D$  bezeichne die offene Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{C}$ . Für eine offene Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  werde mit  $\text{Aut}(\Omega)$  die Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von  $\Omega$  bezeichnet.

- a) Man finde biholomorphe Abbildungen  $\phi_1 : W_{\alpha} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$  und  $\phi_2 : \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\} \rightarrow D$ .

Fortsetzung nächste Seite!



b) Die biholomorphe Abbildung  $\phi := \phi_2 \circ \phi_1$  von  $W_\alpha$  nach  $D$  induziert einen Isomorphismus  $H$  von  $\text{Aut}(D)$  nach  $\text{Aut}(W_\alpha)$ , beschrieben durch  $H(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ .

(i) Man zeige, dass  $I(z) := z^{-1}$  ein Element von  $\text{Aut}(W_\alpha)$  ist.

(ii) Man bestimme  $H^{-1}(I)$ .

#### Aufgabe 4 (6 Punkte)

Auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  sei folgendes Vektorfeld gegeben:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Für alle Lösungen  $\alpha : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ zeige man: } \lim_{t \rightarrow +\infty} |\alpha(t)| = 1.$$

(Hinweis: Man leite zunächst eine Differentialgleichung her, der die Funktion  $r(t) := |\alpha(t)|$  genügt.)

#### Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\beta, \gamma \neq 0$ . Man zeige:

Genau dann sind sämtliche Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$x' = Ax$$

periodisch, wenn  $\beta/\gamma$  rational ist.