Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \quad \text{und} \quad R := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Weiter sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in R keine Nullstellen und in $G \setminus R$ insgesamt k Nullstellen (mit Vielfachheit gerechnet) hat.
Man beweise: Genau dann gibt es eine holomorphe Funktion

$$g : R \to \mathbb{C} \quad \text{mit } g^2(z) = f(z) \text{ für alle } z \in R,$$

wenn k gerade ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f(z + 2\pi) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Man zeige:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion

$$g : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $g(e^{iz}) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.

b) Es gibt Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

c) Ist $|f|$ beschränkt auf $\mathbb{H}$, so gilt $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und

$$\begin{aligned} G_1 &:= \mathbb{H} \setminus \{it : 0 < t \leq 1\}, \\ G_2 &:= \mathbb{H} \setminus \{e^{it} : 0 < t \leq \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

a) Man konstruiere eine biholomorphe Abbildung $f : G_1 \to \mathbb{H}$.
Hinweis: Betrachte zuerst das Bild von G_1 unter der Abbildung $z \mapsto z^2$.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Man konstruiere eine biholomorphe Abbildung $g : G_2 \to G_1$.

c) Man bestimme die Gesamtheit aller biholomorphen Abbildungen $\Phi : G_2 \to \mathbb{H}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

In der Viertelebene

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

betrachte man die Kurvenschar

$$S_c := \{(x, y) \in G : y = \frac{c}{x^2}\}, \quad c > 0.$$

a) Man bestimme eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$, so dass die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

genau die Kurven S_c, $c > 0$, sind.

b) Wie lautet die Differentialgleichung $y' = g(x, y)$ der Orthogonal-Trajektorien zur Kurvenschar $S_c, c > 0$ (d.h. das durch $g(x, y)$ gegebene Richtungsfeld ist in jedem Punkt zu dem durch $f(x, y)$ gegebenen Richtungsfeld orthogonal)?

c) Man berechne die Lösung der Differentialgleichung $y' = g(x, y)$ durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in G$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungs-System

$$(*) \qquad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A(x)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

wobei $A : \mathbb{R} \to M(n \times n, \mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matrix mit stetigen Koeffizienten sei.

Sei A periodisch mit Periode $\gamma > 0$, d.h. $A(x + \gamma) = A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

i) Man zeige: Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = \varphi(\gamma)$, so ist φ periodisch mit der Periode γ, d.h. $\varphi(x) = \varphi(x + \gamma)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Man zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass nicht notwendig alle Lösungen von $(*)$ periodisch sind.