

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^2 z}$$

für $\operatorname{Im} z \geq \epsilon$ gleichmäßig konvergiert, und berechnen Sie $\lim_{y \rightarrow \infty} f(iy)$.

Aufgabe 2:

Welche Werte kann das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)}$$

annehmen, wenn γ alle geschlossenen Integrationswege in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ durchläuft?

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Möbius-Transformation

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

- a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ biholomorph ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung $g(z)$.
- b) Beschreiben und skizzieren Sie die Höhenlinien $|f(z)| = \text{const}$ von f .

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$t^2 \dot{x} + x = t$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Hier wird $\frac{dx}{dt}$ mit \dot{x} bezeichnet. Zeigen Sie:

- Es gibt eine Lösung durch eine formale Potenzreihe $x = P(t)$.
- Es gibt keine analytische Lösung.
- Es gibt unendlich viele unendlich oft reell differenzierbare Lösungen, deren Taylorreihe in $t = 0$ stets die Reihe $P(t)$ ist.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, so dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf $[0, \infty[$ beschränkt sind.