Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = 1 + x^2 \sin(t - x). \tag{1}$$

a) Die Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ von (1) zu den Anfangsbedingungen $x_k(k\pi) = 0$ lassen sich einfach angeben. Bestimmen Sie diese Lösungen.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_k := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid k\pi < t - x < (k+1)\pi\}.$$

Man zeige: Liegt ein Punkt des Graphen

$$G_x := \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

einer Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von (1) in T_k, so ist $G_x \subset T_k$.

c) Zeigen Sie: Alle maximalen Lösungen von (1) sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2:

a) Es seien $a, b > 0$. Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'' &= -a\,x_1 - b\,(x_1 - x_2) \\ x_2'' &= -a\,x_2 - b\,(x_2 - x_1) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

um in ein äquivalentes System erster Ordnung der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
(Ergebnis: $\lambda = \pm i\sqrt{a}$ und $\lambda = \pm i\sqrt{a+2b}$)

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $\{v_1, \ldots, v_4\}$ von Lösungen $v_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von (2) der Form

$$v_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \\ \alpha_j x_{1,j} \end{pmatrix}, \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3:

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{+1, -1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin(\frac{1}{z^2-1})$.

a) Von welchem Typ sind die Singularitäten bei $+1$ und -1?

b) Es seien $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j$ und $\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(z+1)^j$ Laurententwicklungen von f. Zeigen Sie

$$b_j = (-1)^j a_j \text{ für alle } j \in \mathbb{Z},$$

ohne die Koeffizienten zu berechnen.

c) Beweisen Sie $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^5 - 1 - \frac{1}{2}e^z$ in der linken Halbebene $\mathbb{H}_l := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ genau 2 Nullstellen hat, mit Vielfachheiten gezählt.

Aufgabe 5:

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und

$$\mathcal{R} := \{f : \overline{\mathbb{E}} \to \overline{\mathbb{E}} \mid f \text{ stetig und in } \mathbb{E} \text{ holomorph, } f(\partial\mathbb{E}) \subset \partial\mathbb{E}\}$$

a) $f \in \mathcal{R}$ habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie durch explizite Angabe einer geeigneten Möbiustransformation q und des passenden $m \in \mathbb{N}$, dass sich mit dem Ansatz $f_1(z) := \frac{(f \circ q)(z)}{z^m}$ eine Funktion $f_1 \in \mathcal{R}$ konstruieren lässt mit nur noch $k-1$ Nullstellen.

b) $f \in \mathcal{R}$ habe keine Nullstellen. Zeigen Sie, dass f konstant ist.