Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben, insgesamt also maximal 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem *kurzen* Beweis oder einem Gegenbeispiel!

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.

b) Wenn $f(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.

d) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat in 0 keinen Pol.

e) Die Funktion $r \mapsto \displaystyle\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$ ist konstant auf $(0,\infty)$.

f) Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\gamma\colon [0,4\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) := -1 + 3e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{(3+z)^2}{(1+9z^2)(9-z^2)}\,\mathrm{d}z$$

und erläutern Sie Ihre Rechenschritte. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $f_n\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}$.

Zeigen Sie, dass durch $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x_2} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

mit beliebigen positiven Konstanten a, b, c, d.

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Welche Stabilitätsaussagen lassen sich über diese Gleichgewichte durch Linearisierung herleiten?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_2 + x_1 \left(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2\right) \\ \dot{x_2} &= x_1 + x_2 \left(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2\right) \end{aligned}$$

mit einem positiven Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie mithilfe von Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ alle periodischen Lösungen sowie deren (minimale) Periode $T > 0$.

b) Bestimmen Sie für jede Lösung des Systems den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} |x(t)|$.

(6 Punkte)