Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $\gamma(t) := 2e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz$

Aufgabe 2: Sei $f(z) := \frac{1}{(z-1)(2-z)}$, für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1+0\mathrm{i}, 2+0\mathrm{i}\}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0, 2\pi])$, wobei $\gamma(t) := a\cos(t) + ib\sin(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Für ein $p \in \Omega$ existiere eine Lösung $\gamma :]a, \infty[\to \Omega$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = p$. Man zeige, dass dann p eine Ruhelage sein muss (d. h. $f(p) = 0$).

Aufgabe 4: Sei $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Vektor $v(x)$ auf x senkrecht steht (für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$).

a) Man zeige, dass eine stetig differenzierbare Funktion $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die $E(x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nur von der Norm von x abhängt, ein erstes Integral der Differentialgleichung $x' = v(x)$ ist. (Das heißt, die Ableitung von E verschwindet längs des Vektorfeldes v; also $dE(x)(v(x)) = 0$.)

b) Welche Konsequenzen hat die Aussage in (a) für die Phasenkurven der Differentialgleichung $x' = v(x)$?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$.