Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten. Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:

Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$.

a) Sei $h : D(0,2) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $h(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R} \cap D(0,2)$.

   i) Zeigen Sie, dass

   $$h^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \cap D(0,2) \text{ und alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

   ii) Folgern Sie aus (i) die Beziehung

   $$\overline{h(z)} = h(\overline{z}) \qquad \text{für alle } z \in D(0,2).$$

   iii) Gelte zusätzlich $h(iy) \in \{it : t \in \mathbb{R}\}$ für alle $y \in \mathbb{R} \cap D(0,2)$. Dann ist

   $$h(-z) = -h(z) \qquad \text{für alle } z \in D(0,2).$$

   Beweisen Sie diese Gleichung!

(3 Punkte)

b) Sei $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(a) = 0$ und $|f(z)| \leq 5$ für alle $z \in D(a,r)$.

   i) Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung von $D(0,1)$ auf $D(a,r)$.

   ii) Zeigen Sie, dass

   $$|f(z)| \leq \frac{5}{r} \cdot |z-a| \qquad \text{für alle } z \in D(a,r) \text{ gilt.}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}\left(e^{|y|} - e^{-|y|}\right) \text{ ist.}$$

(Hinweis: Man kann von der Formel $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ohne Beweis Gebrauch machen.)

(3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

b) Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Geben Sie die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \qquad z \in M.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(z) := (z-\pi)\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$, um den Entwicklungspunkt $w := \pi$. (2 Punkte)

b) Sei $\gamma(\theta) := e^{i\theta}$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

i) Berechnen Sie $I := \int_\gamma \frac{z^2}{2z+1}\, dz$.

ii) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi \frac{2\cos(2\theta) + \cos(3\theta)}{5 + 4\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{8} \text{ gilt,}$$

indem Sie das Wegintegral I in Teil (i) als Integral über $[-\pi, \pi]$ betrachten.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Man bestimme die Gesamtheit aller reellwertigen beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Seien $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen und sei v das durch $v(x,y) := \begin{pmatrix} f(y) \\ g(x) \end{pmatrix}$ auf $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ definierte Vektorfeld. Seien F, G Stammfunktionen von f bzw. g.

a) Man zeige, dass die Funktion $E(x,y) := F(y) - G(x)$ auf M ein erstes Integral von v ist. (Ein erstes Integral ist eine *Erhaltungsgröße*, also eine stetig differenzierbare Funktion E, deren Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet; d.h. $E'(x,y)\, v(x,y) = 0$. Ein erstes Integral ist demnach auf Integralkurven konstant.)

(2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

b) Man betrachte nun das spezielle Vektorfeld $v(x,y) := \begin{pmatrix} 1/y \\ 1/x \end{pmatrix}$, $(x,y) \in M$, und skizziere dessen Phasenportrait.

(2 Punkte)

c) Man bestimme die maximale Lösung $u : J \to M$, $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$, des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y \\ 1/x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(Hinweis: Es gilt $E(u(t)) = E(u(0))$ für alle $t \in J$.)