Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:
Es sei

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad u(x,y) := \big(x^2 + 2y^2\big)\cos(x+y),$$

und $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1/2\}$; $\overline{D}$ bezeichne den Abschluss dieser Menge.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇u auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass u auf $\overline{D}$ Maximum und Minimum annimmt, und bestimmen Sie das Minimum. (Hinweis: Teil (a) wird hierzu nicht benötigt.)

(c) Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $u = \mathrm{Re} f$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien $f, g : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i + \frac{1}{n}\right) = g\left(i + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder $f = g$ oder es gibt eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{i\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i = \lim_{n\to\infty} g(z_n).$$

(Hinweis: Untersuchen Sie den Typ der Singularität von g im Punkt i.)

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^4}\,dr.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{1+|x|^4}.$$

Dabei bezeichnet $|x| := \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^3$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= e^{x_1}(1-x_2^2), \end{aligned} \qquad x(0) = (1,0)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

(b) Für alle $t \in I$ gilt $-1 < x_2(t) < 1$.

(c) $I = \mathbb{R}$.

(d) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = (0,1)$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = (0,-1)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = 0$.

(6 Punkte)