Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

Aufgabe 1 **(2+2+2 Punkte)**

(a) Definiere $U := \left\{z \in \mathbb{C} : 2|\mathrm{Re}(z)| + 3|\mathrm{Im}(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2}\right\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to U$ und Punkte $v, w \in \mathbb{C}$ mit $h(v) = \frac{i}{2}$ und $h(w) = 1 - i$? Begründung!

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere offene Menge und $z_0 \in \Omega$. Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = 0$, $g(z_0) = g^{(1)}(z_0) = 0$ und $g^{(2)}(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}.$$

(c) Definiere $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \frac{1 - \cos(z)}{z^2}, \qquad z \neq 0.$$

Ist die isolierte Singularität 0 von F hebbar? Begründung!

Aufgabe 2 **(3+3 Punkte)**

Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i) = \mathrm{Log}\Big(\frac{z+i}{z-i}\Big), \qquad z \in U,$$

gilt, wobei $\mathrm{Log} : \Omega_- \to \mathbb{C}$, mit $\Omega_- := \mathbb{C} \setminus \{x + i0 : x \in]-\infty, 0]\}$, der *Hauptzweig des Logarithmus* ist.

Fortsetzung nächste Seite!

(b) Für jedes $z \in U$ sei $\left[1, \frac{z}{2}\right]$ die gerade Strecke in $\mathbb{C}$ von $1 + 0i$ nach $\frac{z}{2}$. Definiere $f : U \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(z) := \int_{[1, \frac{z}{2}]} \frac{1}{1 + \xi^2} \, d\xi, \qquad z \in U.$$

Zeigen Sie:

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z + 2i}{z - 2i}\right), \qquad z \in U.$$

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

(a) Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und r eine reelle Zahl mit $r > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$rze^z = 1$$

genau eine Lösung in K besitzt.
(Hinweis: Die Verwendung des Satzes von Rouché könnte hier hilfreich sein.)

(b) Sei γ die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 3. Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \, dz, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f eine reell-wertige C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ ist.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Man löse das Anfangswertproblem $x' = x + t$, $x(0) = -1$

(a) mit der Methode der Variation der Konstanten;

(b) mittels der Picard-Lindelöf-Iteration $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, beginnend mit $\alpha_0(t) \equiv -1$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$x' = -e^x - 2y + 1,$$
$$y' = 2x - y.$$

Man bestimme alle Ruhepunkte des Systems und untersuche diese auf Stabilität.