Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Es sei f eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 3$ gilt, dass $|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|}$.

Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Es sei

$$X := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

der Abschluss der oberen Halbebene. Zeigen Sie, dass durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + iz - 2}$$

eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ ohne Polstellen definiert ist.

(b) Beweisen Sie, dass $|f|$ auf X ein globales Maximum besitzt.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum von $|f|$ auf X und bestimmen Sie alle Punkte, an denen das globale Maximum angenommen wird. Begründen Sie, warum Ihre Antwort in der Tat das globale Maximum von $|f|$ auf X ist.

(1+2+3 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) = \pi$ und $f'(z) = |z| \cdot f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

(b) Zeigen Sie, dass es höchstens eine ganze Funktion f mit $f(0) = 2 + 3i$ gibt, so dass

$$f'(z) = \sin(z) f(z) + e^{z^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(3+3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) := \int\limits_0^{\sin(x)} e^{t^2}\, dt.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$z \mapsto g(z) := \int\limits_0^{\sin(z)} \sqrt{t^4 + 3z^2}\, dt$$

am Punkt $z = \pi$.

In beiden Aufgabenteilen muss klar ersichtlich sein, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 5:

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{6t}{1+3t^2} y + 5.$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung φ der Differentialgleichung zum Anfangswert $\varphi(0) = 2$. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

(b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{5} y^3 + t \arctan(t) - \frac{\pi t}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung mit $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$ auch der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$ existiert, und bestimmen Sie diesen. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

(3+3 Punkte)