Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (2+1+3 Punkte)

a) Wir betrachten die beiden Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\,, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ existiert.

(2) Geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynoms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

Diese Aufgabe befasst sich mit der Maximierung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 4(x + y)$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 = 1$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer globalen Maximalstelle.

b) Berechnen Sie die globale Maximalstelle und bestimmen Sie das Maximum von f unter obiger Nebenbedingung.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $R > \rho > 0$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ x^2 + y^2 > \rho^2\right\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius R durch „Ausbohren" eines Zylinders vom Radius ρ entsteht. Berechnen Sie das Volumen von M.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x)\sqrt{1 + 4y(x)}, \qquad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten $y_0 \in [-1/4, \infty)$.

a) Geben Sie eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.

b) Geben Sie für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.

Aufgabe 5 (1+3+2 Punkte)

Betrachten Sie zu $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) - 4u(x) + 4u^3(x) &= 0, \\ u(0) &= u_0, \\ u'(0) &= u_1. \end{aligned}$$

a) Finden Sie eine nichtnegative Funktion $G \in C(\mathbb{R})$, sodass

$$L(x) := \tfrac{1}{2}(u'(x))^2 + G(u(x))$$

konstant in x ist.

b) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ hat.

c) Bestimmen Sie stationäre Lösungen der Differentialgleichung. Welche Aussagen zur Stabilität lassen sich allein durch Anwendung des Prinzips der linearen Stabilität treffen?