Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

existiert.

b) Berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, dass die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xe^{x-y^2}$.

b) Zeigen Sie, dass alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = 2xy \quad (1)$$
$$\dot{y} = 1 + x \quad (2)$$

stabil sind, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verwenden Sie dazu das Resultat aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{i, -i, 0\} \mapsto \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

Fortsetzung nächste Seite!

a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.

b) Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}\setminus\{i, -i, 0\}$ besitzt.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (d.h. $B^T = -B$).
Zeigen Sie: $x^T Bx = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

b) Seien $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige Abbildungen, so dass $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit und $B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schief-symmetrisch ist. Zeigen Sie, dass $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) := x^T x$ eine Lyapunov-Funktion zu

$$\dot{x} = -\left(A(x) + B(x)\right) x$$

ist, d.h. zeigen Sie $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x^2 y - 2y \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass der Ursprung eine stabile Ruhelage ist.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

a) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion f sei auf $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ holomorph und habe bei a eine wesentliche Singularität. Sei außerdem g eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Beweisen Sie folgende Aussage: Falls $g(a) \neq 0$, so hat die Produktfunktion $h = fg$ bei a eine wesentliche Singularität.

b) Seien a und f wie in Aufgabenteil a), $g = (z - a)^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Produktfunktion $h = fg$ in a eine wesentliche Singularität besitzt.

c) Seien a und f wie in Aufgabenteil a), g sei auf $\mathbb{C}$ meromorph. Beweisen Sie folgende Aussage: Die Produktfunktion $h = fg$ ist auf $\mathbb{C}$ genau dann meromorph, wenn $g \equiv 0$. (Mit $g \equiv 0$ ist hier jene Funktion gemeint, die ganz $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ auf die Null abbildet).