Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

(2 + 2 + 2 Punkte) Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter sei $b \in \mathbb{R}$.

a) Sei $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls absolut konvergiert.

c) Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls konvergiert.

Aufgabe 2:

(5 + 1 Punkte) Zu gegebenem $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $|a| = 1$ sei $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto t\,a$. Für $R > 1$ sei $\gamma_{a,R} := \gamma_{a|[-R,R]}$ die Einschränkung von γ_a auf das Intervall $[-R, R]$.

a) Zeigen Sie, dass das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_a} \frac{dz}{1-z^2} := \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{a,R}} \frac{dz}{1-z^2}$$

existiert, und bestimmen Sie seinen Wert.

b) Sei nun $\gamma_a^+ := \gamma_{a|[0,\infty)}$. Existiert das Wegintegral $\displaystyle\int_{\gamma_a^+} \frac{dz}{1-z^2}$, wenn man dieses analog zu (a) als Limes interpretiert? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Aufgabe 3:

(1 + 5 Punkte) Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$ und die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + 2y^2 \le 4\}$.

a) Zeigen Sie, dass f Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist. Dabei werde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ identifiziert.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf der Menge M Maximum und Minimum annimmt. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen dies geschieht, und berechnen Sie die entsprechenden Funktionswerte.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
(2 + 2 + 2 Punkte)

a) Sei $x_0 \in (0, \pi)$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(x), \;\; x(0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte, globale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; t \mapsto x(t)$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{t \to -\infty} x(t)$ und $\lim_{t \to \infty} x(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

c) Zeigen Sie, dass es ein $t^* \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass x auf $(-\infty, t^*)$ strikt konvex und auf (t^*, ∞) strikt konkav ist.

Aufgabe 5:
(6 Punkte) Untersuchen Sie für jeden Parameterwert $a \in \mathbb{R}$ die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage $x_1 = 0,\; x_2 = 0$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a\,x_1 + x_2 + (a+1)\,x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a\,x_2. \end{aligned}$$