Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:
(1+1+1+3 Punkte)
Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \big(\sin(x_2), -\sin(x_1)\big)$ bestimmt die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

a) Zeigen Sie: Für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung $\phi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte (Ruhelagen) in $\mathbb{R}^2$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) ist.

d) Welche Gleichgewichtspunkte sind Liapunow-stabil, welche instabil? Benutzen Sie Teil c) zum Nachweis der Liapunow-Stabilität.

Aufgabe 2:
(1+1+1+3 Punkte) Betrachten Sie die Funktionenreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, also eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
Hinweis: Sie können die Gleichmäßigkeit der Konvergenz benutzen.

c) Zeigen Sie, dass f periodisch mit Periode 2π ist.

d) Zeigen Sie, dass f in 0 nicht differenzierbar ist, indem Sie für die Differenzenquotienten

$$d_k := \frac{f(\pi/2^k) - f(0)}{\pi/2^k} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

die Beziehung $d_{k+1} = d_k + \frac{2^{k+1}}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2^{k+1}})$ ableiten und folgern, dass gilt: $\lim_{k \to \infty} d_k = +\infty$.

Aufgabe 3:
(2+2+2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jede holomorphe Funktion $f \colon B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$|f(z)| = 1 \quad \text{für alle } z \in B_1(0)$$

ist konstant.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z+\mathrm{i}) = f(z) = f(z+1) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(k) = f(\mathrm{i}k) = f(0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

ist konstant.

Aufgabe 4:

(1+4+1 Punkte) Es sollen die komplexen Integrale $I_n := \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$ benutzt werden, um zu zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral $J := \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ existiert, und um dessen Wert zu bestimmen. Dabei setzt sich der geschlossene Weg γ_n für $n \in \mathbb{N}$ aus den folgenden Teilwegen zusammen:

$$\begin{aligned}
\gamma_n^{(1)} &: [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(1)}(t) &= e^{-it}/n, \\
\gamma_n^{(2)} &: [1/n, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(2)}(t) &= t, \\
\gamma_n^{(3)} &: [0, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(3)}(t) &= n + it, \\
\gamma_n^{(4)} &: [-n, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(4)}(t) &= ni - t, \\
\gamma_n^{(5)} &: [0, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(5)}(t) &= n(-1+i) - it, \\
\gamma_n^{(6)} &: [-n, -1/n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(6)}(t) &= t.
\end{aligned}$$

γ_n hat damit die Form eines Rechtecks mit einem Halbkreis um Null.

a) Zeichnen Sie das Bild eines Wegs γ_n und beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $I_n = 0$.

b) Berechnen Sie für $I_n^{(k)} := \int_{\gamma_n^{(k)}} \frac{e^{iz}}{z} dz$ jeweils den Limes

$$I^{(k)} := \lim_{n\to\infty} I_n^{(k)} \quad (\text{für } k = 1, 3, 4, 5) \quad \text{und daraus } \lim_{n\to\infty} (I_n^{(2)} + I_n^{(6)}).$$

c) Folgern Sie, dass das Integral J existiert, und berechnen Sie seinen Wert.

Aufgabe 5:

(6 Punkte) Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = \sin(at).$$

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a jede Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unbeschränkt ist.