Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:

(a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(0) = 0 < f''(0)$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi > 0$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Zudem sei

$$F_n(x) := \int_0^x f_n(t)\,dt \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Begründen Sie kurz, dass die Integralfunktion

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

auf $[0,1]$ wohldefiniert ist, und zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen F konvergiert.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Geben Sie eine mathematisch präzise Definition für die Stabilität einer Ruhelage x_0 einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an.

Im Folgenden betrachten wir die skalare autonome Differentialgleichung

$$x' = x \cdot \sin x.$$

(b) Geben Sie die Ruhelagen der Differentialgleichung an und entscheiden Sie, welche der Ruhelagen $\neq 0$ stabil sind.

(c) Es sei ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_0 < \pi$ gegeben. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige maximale Lösung x der Differentialgleichung mit $x(0) = x_0$ gibt, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, streng monoton steigt und dass $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \pi$ gilt.

(d) Begründen Sie, z.B. mithilfe von (a) und (c), dass die Ruhelage 0 der Differentialgleichung instabil ist.

(1+1+3+1 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie explizit die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \pi \cos t \cdot (1 + x^2(t)), \qquad x(0) = 0$$

und deren maximales Existenzintervall.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$\langle f(x), x\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad f(0) = 0.$$

(Hierbei bezeichnet $\langle . \, , . \rangle$ das euklidische Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.)

Zeigen Sie, dass für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ die euklidische Norm $t \mapsto \|x(t)\|$ konstant ist und dass die Ruhelage 0 dieser Differentialgleichung stabil ist.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 4:

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichne die offene Einheitskreisscheibe.

(a) Es sei $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass für das Residuum der Ableitung f' im Nullpunkt $\operatorname{res}_0 f' = 0$ gilt.

(b) Es sei f eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion. Für die Ableitung f' von f gelte die Abschätzung

$$|f'(z) - ze^z| < \frac{1}{2} \cdot e^{Re(z)} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z| = \frac{1}{2}.$$

Begründen Sie, weshalb f dann nicht injektiv sein kann.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 5:

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichne die offene Einheitskreisscheibe.

(a) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, die unendlich viele Nullstellen in der punktierten Kreisscheibe $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Singularität von f in $z = 0$ wesentlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \cdot \big((f \circ f)(z) - 1\big) = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

konstant ist.

(3+3 Punkte)