Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Es gibt eine Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, die nur in genau einem Punkt stetig ist.

(b) Ist $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\sup_{x \in (0,1)} |f'(x)| < \infty$, dann ist f beschränkt und gleichmäßig stetig.

(c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n(1 - x^{2n})$ für $x \in [0, 1]$ konvergiert gleichmäßig.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Man betrachte das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= 1 - x - Rxy, \\ y' &= Rxy - y \end{aligned}$$

für einen reellen Parameter $R \neq 1$.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von R alle stationären Punkte des Systems, die im abgeschlossenen ersten Quadranten, d.h. in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, liegen.

(b) Linearisieren Sie das System jeweils um die in (a) bestimmten Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

(2+4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sin(tx(t)), \quad x(0) = \xi$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie die beiden Aussagen (a) und (b) und geben Sie eine begründete Antwort auf die Frage in (c).

(a) Das Anfangswertproblem besitzt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $x_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ist die Lösung x_ξ eine gerade Funktion, d.h. $x_\xi(t) = x_\xi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Nimmt die Lösung x_π zum Anfangswert $\xi = \pi$ negative Werte an?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4:

Entscheiden und begründen Sie für jede Teilaufgabe (a) bis (c) jeweils, ob es Paare ganzer Funktionen (f, g) mit der genannten Eigenschaft bzw. den genannten Eigenschaften gibt. Falls ja, ist eine Charakterisierung aller solcher Funktionenpaare anzugeben.

(a) $f^2 - fg = 0$,

(b) $\max\{|f|, |g|\} \leq 1$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $f(0) = 3 + g(0)$,

(c) f hat keine Nullstelle, $g(0) = 0$ und $|g - f| < |f|$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 5:

(a) Erklären Sie, dass die Cauchy'sche Integralformel einen Spezialfall des Residuensatzes darstellt.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit einfachem Pol in 0 und Residuum $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$ gibt. Begründen Sie, wie sich der Sachverhalt ändert, wenn der Pol von f in 0 von zweiter anstatt erster Ordnung ist.

(c) Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z^4} \, dz.$$

(2+2+2 Punkte)