Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = 2tx^2, \qquad x(2) = -\frac{1}{3}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie diese. Geben Sie insbesondere auch ihr Definitionsintervall I an.

b) Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -4y^3 + 4y, \\ y' &= 4x^3 - 4x. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2$$

eine Erhaltungsgröße des gegebenen Systems ist, d.h. dass sie entlang jeder Lösungskurve konstant ist.

(2) Bestimmen Sie alle im abgeschlossenen ersten Quadranten liegenden stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

(2 + (1+3) Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\pi \in U$.

a) Die Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(\pi) = f'(\pi) = 0$ und $f''(\pi) = 1$. Bestimmen Sie für

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin(z) \cdot f(z)$$

die Nullstellenordnung in π.

b) Geben Sie an, für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h : U \setminus \{\pi\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $(h(z))^n = (z-\pi)^6$ für alle $z \in U \setminus \{\pi\}$ existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Wenn es ein derartiges h gibt, welchen Typ hat dann die isolierte Singularität von h bei π?

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und geben Sie einen Beweis an, der auf der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen und deren Ableitungen oder auf dem Residuensatz basiert.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} z^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass dann f die Gestalt $f(z) = z^n + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ besitzt.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Es sei $b : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$\int_0^\infty |b(t)|\, dt < \infty,$$

und $y : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (-1 + b(t)) \cdot y\,.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$ gilt.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: Falls jede Lösung $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung $x' = Ax$ auf $[0, \infty)$ beschränkt ist, so gilt $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A. Entscheiden Sie begründet, ob die Umkehrung dieser Aussage auch richtig ist.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 5:

Auf der Menge

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x^2 + 4y^2 \leq z\}$$

sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + z^2}.$$

a) Für jedes $\zeta > 0$ bezeichnet $f|_{\Omega_\zeta}$ die Einschränkung von f auf die Menge

$$\Omega_\zeta := \{(x, y, z) \in \Omega \,|\, z = \zeta\}.$$

Zeigen Sie, dass $f|_{\Omega_\zeta}$ ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt und deren Werte gegeben sind durch

$$\frac{1 + \frac{4}{3}\zeta}{1 + \zeta^2} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \frac{1}{1 + \zeta^2}.$$

b) Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob f ein globales Maximum beziehungsweise ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

(4 + 2 Punkte)