Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f_a : \mathbb{C} \setminus \{i, -i, a\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_a(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-a)}.$$

a) Berechnen Sie die Residuen von f_a an den Polstellen i, $-i$ und a und zeigen Sie, dass ihre Summe den Wert 0 hat.

b) Es sei

$$\Gamma_a = \left\{ \frac{\pi}{i-a} \cdot k + \frac{\pi}{i+a} \cdot \ell \;\middle|\; k, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zeigen Sie: Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, a\}$ gilt $\int_\gamma f_a(z)\, dz \in \Gamma_a$.

c) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_a(z)\, dz$ für den Fall $\operatorname{Im}(a) > 0$. (Die Existenz des Integrals brauchen Sie nicht nachzuweisen.)

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne

$$K = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Menge $A(K)$ eine Ellipse mit Mittelpunkt 0 ist. Weiter sei

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K \,:\, x_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Wir versehen den Raum $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$.

a) Entscheiden Sie für die beiden folgenden Maximierungsprobleme jeweils, ob das Maximum existiert, und bestimmen Sie es gegebenenfalls:

$$(1) \quad \max_{x \in K} \|Ax\|^2 \qquad\qquad (2) \quad \max_{x \in B} \|Ax\|^2$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Inneren der Ellipse $A(K)$. **((3+2) + 1 Punkte)**

Aufgabe 3:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Ist $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0,$$

dann gilt $\lim_{t\to\infty} e^t(x(t))^2 = 0$.

b) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ derart, dass die beiden Funktionen $x_1(t) = e^t$ und $x_2(t) = 1 + t$ für $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' = f(x', x)$$

lösen.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die im Ursprung ein striktes Minimum annimmt, d.h. es gilt $F(0) < F(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und die sonst keine weiteren kritischen Punkte besitzt. Man betrachte das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad \text{mit} \qquad f(\xi) = -\nabla F(\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^2,$$

wobei ∇F den Gradienten von F bezeichnet.

a) Begründen Sie, warum 0 die einzige Ruhelage des Systems ist.

b) Zeigen Sie mithilfe der direkten Methode von Lyapunov, dass 0 asymptotisch stabil ist.

c) Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität einer Ruhelage eines autonomen Systems gemäß dem Prinzip der linearisierten Stabilität.
Geben Sie sodann ein Beispiel einer Funktion F mit den obigen Eigenschaften an, für die das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht ausreicht, um die asymptotische Stabilität von 0 zu beweisen.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 5:

In dieser Aufgabe bezeichne $D(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ und mit Mittelpunkt im Ursprung.

a) Es sei $\varepsilon > 0$, und

$$f : D(1+\varepsilon) \longrightarrow D(1)$$

sei eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Es gibt ein eindeutiges $p \in D(1)$, so dass $f(p) = p$.

b) Charakterisieren Sie alle in der offenen Einheitskreisscheibe $D(1)$ holomorphen Funktionen $f : D(1) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq e^{-n}.$$

(3 + 3 Punkte)