Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe (4 Punkte)

Skizzieren Sie die Phasenporträts der ebenen autonomen Systeme $\dot{x} = Ax$ für die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (11 Punkte)

Man untersuche die Differentialgleichung $r'' = -r^{-2}$, die sich deuten lässt als Differentialgleichung für den freien Fall eines Körpers der Masse $M = 1$ im Schwerefeld mit Gravitationskonstante $\gamma = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die "Energie" $E(r,r') = \frac{1}{2}(r')^2 - r^{-1}$ ein erstes Integral für diese Gleichung ist, und erklären Sie, was das für die Lösungen der Differentialgleichung bedeutet.

Bei gegebenen Konstanten $R > 0$, $v_0 \in \mathbb{R}$ wird $E_0 := E(R, v_0)$ gesetzt und das Anfangswertproblem

(*) $$r'' = -r^{-2}, r(0) = R, r'(0) = v_0$$

für $r > 0$ betrachtet.

b) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem (*) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $r(t)$ auf einem gewissen maximalen Intervall $I = \left]t_\alpha, t_\omega\right[$ um $t = 0$.

c) Zeigen Sie: Im Fall $v_0 > 0$, $E_0 > 0$ gilt $t_\omega = \infty$ und $\lim\limits_{t \to \infty} r(t) = \infty$

d) Berechnen Sie die Lösung $r(t)$ im Falle $E_0 = 0$, $v_0 > 0$.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, eine ganze Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

a) Für alle reellen y ist $f(iy)$ reell.
b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{a_n} = (-1)^n a_n$.
c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{f(z)} = f(-\overline{z})$.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe (5 Punkte)

Konstruieren Sie eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$, die für jede natürliche Zahl n im Punkt n^2 eine Polstelle erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat und sonst überall holomorph ist, indem Sie für f eine geeignete Reihe ansetzen. Begründen Sie, warum die gewählte Reihe in der erforderlichen Weise konvergiert.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Es seien

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\},\ D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Für welche $j \in \{1,2,3\}$ gibt es eine auf D_j holomorphe Funktion f_j mit $(f_j(z))^3 = z^3 - 1$ für alle $z \in D_j$?