Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die nur im Nullpunkt komplex differenzierbar ist (mit Begründung).

b) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonisch sind.

c) Das Symbol i^i besitzt unendlich viele Werte. Bestimmen Sie diese Werte.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien folgende Punkte in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ gegeben:

$$z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i \text{ sowie } w_1 = -i/2, w_2 = i, w_3 = -i.$$

a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation mit $f(z_i) = w_i$ für $i = 1,2,3$.

b) Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises und seines Randes unter f.

c) Bestimmen Sie die zu f inverse Abbildung.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und f eine auf G holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Fortsetzung nächste Seite!

5. Aufgabe (7 Punkte)

Es sei f eine in einer Kreisscheibe um den Nullpunkt meromorphe Funktion, die dort der Differentialgleichung

$$y'' = 6y^2$$

genügt. Zeigen Sie, dass f eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

i) f ist identisch Null.

ii) f besitzt im Nullpunkt eine Polstelle der Ordnung 2.

iii) f ist holomorph im Nullpunkt mit $f(0) \neq 0$.

iv) f ist holomorph im Nullpunkt mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$.