Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 2 - 5 sind alle Schlussfolgerungen und nicht-trivialen Rechenschritte mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über eine analytische Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung (mit Nennung aller benutzten Sätze) an, bei falschen ein Gegenbeispiel.

a) Ist $G = \mathbb{C}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

b) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

c) Ist G die offene rechte Halbebene und f beschränkt, so ist f konstant.

d) Ist G beschränkt, so hat f nur endlich viele Nullstellen in G.

e) Ist $G = \mathbb{C}$ und f injektiv, so ist $f(z) = az + b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{C}$.

f) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f injektiv, so ist $f(z) = az + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$ geeignet.

Aufgabe 2:

Finden Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und bestimmen Sie ihren Typ:

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}, \qquad g(z) = \exp(\tan \frac{1}{z}).$$

Welche dieser Funktionen hat nur isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

in allen Singularitäten sowie im Punkt ∞.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 1},$$

wobei C die positiv durchlaufene Kreislinie $(x-1)^2 + y^2 = 1, \ z = x + iy$ bezeichne.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x(1-x-y), \qquad \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x\right).$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte von $(*)$ und klassifizieren Sie diese (mit Begriffen wie „Senke“, „stabil“ usw.).