Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 1 - 5 sind alle Schlussfolgerungen und nicht-trivialen Rechenschritte mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Wie viele Nullstellen hat die Gleichung $z^4 - 5z + 1 = 0$

a) im Kreisgebiet $\{z : |z| < 1\}$,

b) im Ringgebiet $\{z : 1 < |z| < 2\}$,

c) im Außengebiet $\{z : |z| > 2\}$?

Aufgabe 2:

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$, und f^n bezeichne die n-fache Hintereinanderausführung von f, d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $f^0(z) := z$ und $f^n(z) := f(f^{n-1}(z))$. Weiter bezeichne $U_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ die offene ε-Umgebung von 0. Beweisen Sie:

a) Für alle $z \in U_\varepsilon(0)$ gilt $|f(z)| \leq |z| \sup\{|f'(w)| : w \in U_\varepsilon(0)\}$.

b) Gilt $|f'(0)| < 1$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $z \in U_\varepsilon(0)$ in $U_\varepsilon(0)$ verbleibt und für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx$$

mittels komplexer Integration über eine geeignete geschlossene Kurve.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die maximale Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sin(x+y)} - 1, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie sämtliche Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$