Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 1 - 5 sind alle Schlussfolgerungen und nicht-trivialen Rechenschritte mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie diejenige holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die harmonische Funktion $u(x,y) = x^3y - xy^3$ als Realteil hat und die Bedingung $f(0) = 3i$ erfüllt. Drücken Sie f als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ aus.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3 + z + i}\, dz.$

c) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ derart, dass $P(z) = e^{h(z)}$ (mit P wie in (a)) gilt?

Aufgabe 3:

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\, y \le 0\}$, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(1) = 1$ und $f(z)^2 = z$ für alle $z \in G$.

a) Zeigen Sie, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, wenn man noch $f(0) := 0$ setzt.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$, wobei C den positiv orientierten, geschlossenen Weg bezeichne, der den Halbkreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1,\, 0 \le \arg z \le \pi\}$ berandet.

Aufgabe 4:

Erstellen Sie für das System

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = |x|$$

das Phasenportrait und bestimmen Sie explizite Darstellungen aller Lösungen, die für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen $(0,0)$ konvergieren. Erklären Sie ferner, warum jedes zu diesem System gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $C[0,1]$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Metrik

$$d(f,g) := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|,$$

und sei $C_0^1[0,1]$ der Unterraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Beweisen Sie:

a) $C_0^1[0,1]$ ist weder offen noch abgeschlossen in $C[0,1]$.

b) Die Abbildung $A : C_0^1[0,1] \to C[0,1]$ mit $A(f) := f'$ ist linear und bijektiv.

c) Die Abbildung A ist nicht stetig zwischen den metrischen Räumen $(C_0^1[0,1], d)$ und $(C[0,1], d)$.

d) Bezeichnet d_1 die Metrik

$$d_1(f,g) := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x) - g'(x)|,$$

so ist die Abbildung A stetig zwischen den metrischen Räumen $(C_0^1[0,1], d_1)$ und $(C[0,1], d)$.