Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: Es seien $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ zwei *verschiedene* holomorphe Funktionen und (z_n) eine Nullfolge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f oder g dann eine wesentliche Singularität im Nullpunkt hat.

Aufgabe 2: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset G$. Weiter sei $f : G \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathbb{E}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Zeigen Sie, dass $f - g : \mathbb{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gerade der Hauptteil von f ist, d.h. die Laurententwicklung von $f - g$ um 0 ist der Hauptteil der Laurententwicklung von f um 0.

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ eine Nullfolge (z_n) in $\mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{z_n} = c.$$

Aufgabe 4: Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und ϕ der durch $\phi(x, t) := e^{tA} x$ gegebene Fluss auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Flusslinien der Punkte $x \in \mathbb{R}^2$.
[Die "Flusslinie" durch x ist die Bewegung des Punktes x unter der Wirkung des Flusses ϕ, also die Abbildung $t \mapsto \phi(x, t)$; das Bild dieser Abbildung wird als "Trajektorie", "Bahnkurve" oder "Phasenkurve" bezeichnet.]

(b) Finden Sie ein erstes Integral der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
[Ist $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so heißt eine differenzierbare Funktion f "erstes Integral" der Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$, wenn ihre Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet, d.h. wenn $df(x)v(x) \equiv 0$ ist; ein erstes Integral ist stets auf Lösungskurven konstant.]

(c) Skizzieren Sie das Phasenporträt (also die Gesamtheit aller Trajektorien) von ϕ.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = f(x_1, x_2) := e^{-(x_1^2+x_2^2)}.$$

Betrachtet werde das Vektorfeld $v(x) := \operatorname{grad} f(x)$ sowie die (autonome) Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$.

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld v.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass jede den Nullpunkt enthaltende Lösungskurve konstant 0 ist.

(c) Sei $x : I \to \mathbb{R}^2$ eine auf einem Intervall definierte Lösungskurve, $t_0 \in I$ mit $x(t_0) \neq 0$, und $w \in \mathbb{R}^2$ ein zu $x(t_0)$ orthogonaler Vektor, d.h. $\langle w, x(t_0)\rangle = 0$. Leiten Sie für die durch $s(t) := \langle w, x(t)\rangle$ definierte Funktion $s : I \to \mathbb{R}$ eine Differentialgleichung her, und folgern Sie $s(t) \equiv 0$.