Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = x - x^2 + \gamma \dot{x}$$

mit einem reellen Parameter γ.

(a) Sei zunächst $\gamma = 0$. Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) der Differentialgleichung, und skizzieren Sie das Phasenportrait! Welche stationären Lösungen der Differentialgleichung sind stabil?

(Hinweis: Um eine Erhaltungsgröße zu finden, kann man z. B. die mit $\dot{x}$ multiplizierte Gleichung betrachten.)

(b) Sei nun $\gamma \neq 0$. Wie verhält sich jetzt die Erhaltungsgröße aus Teil (a) längs Lösungen der Differentialgleichung? Für welche Werte von γ besitzt die Differentialgleichung asymptotisch stabile stationäre Lösungen und welche sind dies?

Aufgabe 2. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Aufgabe 3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x), \ x(0) = 0$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ $(*)$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(ii) f stetig differenzierbar und $x :]-1, 1[\to \mathbb{R}^n$ die maximal fortgesetzte Lösung von $(*)$ $\Rightarrow$ $\limsup_{t\to 1} |x(t)| = \infty$.

(iii) $(*)$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.

(iv) f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ $(*)$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4. Sei f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, und es gelte $|f(z)| \leq |z|^2 + \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist!

Aufgabe 5. Sei

$$F(z) = \int_{|w|=2} \frac{dw}{w(w-z)(w-z+1)},$$

wobei die Kreislinie $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 2\}$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werde. Bestimmen Sie den Grenzwert von $F(z)$ für $z \to 2$, wenn

(a) z immer in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ liegt,

(b) z immer außerhalb der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ liegt!