Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an!

(a) Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$.

(b) Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

(c) Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{D}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie unter Verwendung des Identitätssatzes, dass U genau dann zusammenhängend ist, wenn für je zwei holomorphe Funktionen $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ die Implikation gilt:

$$f \cdot g \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0 \text{ oder } g \equiv 0.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$$

und auf

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-2| < 1\}.$$

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$ mit $\gamma(t) = 3e^{2\pi i t}, t \in [0, 1]$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei das parameterabhängige, 2-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$(\Sigma_\alpha) \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = f_\alpha(x, y) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \left(1 - x^2 - y^2\right) \begin{bmatrix} \alpha x \\ y^3 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha \in (-1, 1)$.

Fortsetzung nächste Seite!

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $(0,0)$ die einzige Ruhelage von (Σ_α) in $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ist und untersuchen Sie diese für $\alpha \neq 0$ auf Stabilität.

(b) Zeigen Sie für $\alpha = 0$ mit Hilfe der Funktion $H(x,y) := x^2 + y^2$ die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $x(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + \mathrm{e}^{t\alpha} b, \quad x(0) = 0,$$

dann gilt

$$\mathrm{e}^{t\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{tA} & x(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{t\alpha} \end{bmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{e}^{t\tilde{A}}$ mittels Teilaufgabe (a) für $\tilde{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.