Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Bezeichnungen: Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | \; |z| < 1\}$ und $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} | \; |z| \leq 1\}$

Aufgabe 1:
Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z \cdot e^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $\mathbb{D}$ genau eine Lösung z_0 hat, und dass diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 3:
a) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der meromorphen Funktion

$$f(z) := \frac{3}{z^2 + z - 2}$$

auf dem unbeschränkten Kreisring $R_{2,\infty} := \{z \in \mathbb{C} | \; |z| > 2\}$ um $z = 0$.

b) Besitzt f eine Stammfunktion auf $R_{2,\infty}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4:
Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen $x = x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$t^2 + x^2 + 2tx\dot{x} = 0, \qquad x(1) = 1$$

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine exakte Differentialgleichung handelt.

b) Bestimmen Sie das maximale Intervall, auf das sich diese Lösung fortsetzen lässt.