Thema Nr. 1

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bemerkung: *Begründen Sie Ihre Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text. Für $r > 0$ bezeichne*

$$B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

die offene Kreisscheibe vom Radius r.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f im Punkt a die Art der Singularität von f in a. Geben Sie bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von f in a, bei Polen den Hauptteil und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum an.

i)
$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{z^3 - 5z + 6i}{z^2 + 1}\,,\ a = i,$$

ii)
$$f : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{1}{\exp(z) - 1}\,,\ a = 2\pi i,$$

iii)
$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}\,, f(z) = \cos\Big(\frac{1}{z}\Big)\,,\ a = 0,$$

Aufgabe 2: Seien

$$p(z) = a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$$

und

$$q(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0 \in \mathbb{C}[z],\ q \neq 0,$$

Polynome vom Grad m und n (i.e. $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$). Zeigen Sie:

i) Ist $m \leq n - 2$, so gilt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$$

wobei $\partial B_r(0)$ wie üblich den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ bezeichne.

Fortsetzung nächste Seite!

ii) Ist $m \leq n-2$ und $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von $q(z)$ in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 0.$$

iii) Ist $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von $q(z)$ in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{q'(z)}{q(z)}dz = n.$$

iv) Ist $m = n-1$ und $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von $q(z)$ in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)}dz = \frac{a_{n-1}}{b_n}.$$

Aufgabe 3: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $A \subseteq G$ eine endliche Teilmenge und $f : G \setminus A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Das Residuum von f an allen Stellen $a \in A$ sei ganzzahlig. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $g : G \setminus A \to \mathbb{C}^*$ mit der Eigenschaft

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \forall z \in G \setminus A,$$

existiert.

Aufgabe 4: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der Lösung an:

i)

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}, \; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

ii)

$$y' - \frac{t}{t^2-1}y = \sqrt{t^2-1}, \; y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass jede auf ihren maximalen Definitionsbereich fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot \sin(y)$$

bereits auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.