Thema Nr. 3

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1
Seien $a, b > 0$. Im $\mathbb{R}^2$ sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) x - \frac{ay}{b} \\ \dot{y} &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) y + \frac{bx}{a} \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Ist $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung dieses Systems, so erfüllt $r^2(t) := \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} r^2 = 2(1 - r^2) r^2.$$

(b) Das System besitzt eine nichtkonstante periodische Lösung $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$.

(c) Die periodische Lösung aus (b) ist stabil in dem Sinn, dass

$$r^2(t) \to r_0^2(t) = \frac{x_0^2(t)}{a^2} + \frac{y_0^2(t)}{b^2}, \text{ wenn } r^2(0) \to r_0^2(0).$$

Aufgabe 2

(a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a > 0$. Sei $H : [0, a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $f_1, \ldots, f_n : [0, a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i = 0 \text{ in } [0, a] \times \Omega \qquad (1)$$

Zeigen Sie, dass H auf jeder Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : [b, c] \to \Omega$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \ 1 \leq k \leq n, \qquad (2)$$

konstant ist $(0 \leq b < c \leq a)$.

(b) $H, f_1, \ldots, f_n$ mögen den Differenzierbarkeitsvoraussetzungen unter (a) genügen. Zu jeder Lösung $\mathbf{x} : [b, c] \to \Omega$ $(0 \leq b < c \leq a)$ von (2) gebe es eine Konstante $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ mit

$$H(t, \mathbf{x}(t)) = \alpha, \ b \leq t \leq c.$$

Zeigen Sie, dass H die Gleichung (1) erfüllt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3
Betrachtet wird das ebene autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x \end{aligned} \tag{3}$$

um den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$.

(a) Finden Sie ein stetig differenzierbares $H = H(x,y)$, das auf den Lösungen von (3) konstant ist.
Hinweis: Suchen Sie ein H mit $\dot{x} = H_y$, $\dot{y} = -H_x$. Warum ist H dann konstant auf den Lösungen von (3)?

(b) Begründen Sie anschaulich, warum die Lösungskurven $(x(t), y(t))$ von (3) in der Nähe von $(0,0)$ geschlossen sind.
Hinweis: Untersuchen Sie H auf Extrema.

Aufgabe 4
Die Koeffizienten c_n der Potenzreihe $\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ seien durch die Rekursionsformel

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} \text{ für } n \geq 2$$

und die Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ definiert.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}(z) = z + \mathcal{F}(z)^2$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\mathcal{F}(z)$.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

Aufgabe 5
Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0 \text{ und } f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$f(z_n) \to e^{\pi} \text{ für } n \to \infty.$$

(Hinweis: Welche Art Singularität muss f in 0 haben?)
Gibt es eine Funktion f mit obigen Eigenschaften?