Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie das Integral
$$\int_\gamma z\mathrm{d}z,$$
wobei γ den in der oberen Halbebene gelegenen Rand der im Ursprung zentrierten Ellipse mit großer Halbachse $a = 2$ längs der reellen Achse und kleiner Halbachse $b = 1$ längs der imaginären Achse von 2 nach -2 durch die obere Halbebene durchläuft.

b) Welchen Wert hat obiges Integral, falls der Weg auf dem Ellipsenrand durch die untere Halbebene gewählt wird?

Aufgabe 2:

Seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| < \infty.$$
Zeigen Sie, dass das Produkt
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - a_n}{z - b_n}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ außerhalb des Abschlusses von $\{b_1, b_2, ...\}$ konvergiert.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie unter Verwendung eines Integrationsweges, der von 0 über R über $Re^{\mathrm{i}2\pi/3}$ zurück nach 0 verläuft, das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$$

Aufgabe 4:

Sei G ein Gebiet mit $G \subset E := \{z \in \mathrm{C} : |z| < 1\}$; f sei eine auf G holomorphe Funktion, die auf E durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben ist. Die Koeffizienten der Reihe seien alle nichtnegativ und der Konvergenzradius der Reihe sei 1. Zeigen Sie, dass $1 \notin G$. (Hinweis: Entwickeln Sie f um $1/2$ und untersuchen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe unter der Annahme, dass 1 ein regulärer Punkt von f sei.)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Finden Sie die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \omega$$

für $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \lambda < 0$. Welchen Typs ist das Gleichgewicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
Skizzieren Sie das Phasenportrait, begründen Sie seine Hauptmerkmale.