Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Finden Sie heraus, ob die folgenden Aussagen über $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Bei wahren Aussagen geben Sie eine kurze Begründung, bei falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

a) Ist f differenzierbar, so ist f' stetig.

b) Ist f differenzierbar, so ist f' beschränkt.

c) Ist f stetig, so nimmt f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

d) Nimmt f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, so ist f stetig.

e) Ist f stetig, so besitzt f eine Stammfunktion.

f) Ist f stetig, so ist f integrierbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Beschreiben Sie ein Lösungsverfahren für die Bernoulli-Differentialgleichung
$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^{\tau},$$
wobei p und q stetige Funktionen und $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ seien.

Hinweis: Verwenden Sie eine Transformation der Form $z := y^{\alpha}$ mit geeignetem α.

b) Berechnen Sie mit dem in (a) beschriebenen Verfahren eine Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = x\sqrt{y} - y, \qquad y(0) = 4.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Konstruieren Sie eine gebrochen-rationale Abbildung (Möbiustransformation) f, die die Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 2\}$ auf die obere Halbebene $H := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}$ abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt? (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes, dass
$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos t} = \frac{\pi}{2}$$
ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

b) Für $r > \frac{1}{2}$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Für welche r gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon D_r \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$?

(6 Punkte)