

**Thema Nr. 2**  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

*Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!*

**Aufgabe 1:**

Sei  $B(z_0, r)$  die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r > 0$  in der komplexen Ebene.

- a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\sin(\pi z)}$$

sowie die Ordnung der Nullstellen und Polstellen von  $f$ , so welche vorliegen.

- (b) Sei  $f$  die Funktion aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(3/2, 1)} f(z) dz.$$

- (c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(0, 4)} \frac{\cos z}{(z+1)^3} dz.$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

- (a) Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass  $|f(z)| \geq \pi$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f(z) = f(\pi)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt.
- (b) Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass  $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  konstant ist.

(6 Punkte)



**Aufgabe 3:**

- a) Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $c \in D$  und seien  $f$  und  $g$  auf  $D$  holomorph. Weiter habe  $g$  in  $c$  eine Nullstelle zweiter Ordnung. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}_c \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)}{3(g''(c))^2}.$$

- b) Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $c \in D$ , und die auf  $D \setminus \{c\}$  holomorphe Funktion  $h$  habe in  $c$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung,  $m \geq 1$ . Sei  $p$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ . Zeigen Sie, dass  $p \circ h$  in  $c$  einen Pol der Ordnung  $mn$  besitzt.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

- a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y(x) - 1)}, \quad y(0) = -1$$

und zeigen Sie, dass die Lösung für alle  $x \geq 0$  existiert.

- b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = 2y(x)^2 + xy(x)^2, \quad y(0) = 1,$$

bestimmen Sie das maximale Existenzintervall  $I$ , alle lokalen Extrema der Lösung  $y$  auf  $I$  und klassifizieren Sie diese nach Maxima und Minima.

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

- a) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers im dreidimensionalen Anschauungsraum, der durch die Ebene  $z = 0$ , die Fläche  $z = x^2 + 2y^2$  und die Ebenen  $x + y = 1$ ,  $-x + y = 1$ ,  $x - y = 1$  und  $-x - y = 1$  berandet wird.
- b) Sei  $R$  das Gebiet in der euklidischen Ebene, das durch die Kurven  $xy = \frac{\pi}{4}$ ,  $xy = \frac{\pi}{2}$ ,  $y(2-x) = 2$  und  $y(2-x) = 4$  berandet wird. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_R y \cos(xy) d(x, y).$$

*Hinweis:* Transformationssatz mit  $x = 2v/(u+v)$  und  $y = u+v$ .

(6 Punkte)