

**Thema Nr. 1**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

*Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!*

**Aufgabe 1:**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie, bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

- a) Ist  $(z_n)_n$  eine Folge in  $G$  mit  $f(z_n) = 0$  für alle  $n$ , so ist  $f(z) \equiv 0$ .
- b) Ist  $(z_n)_n$  eine Folge in  $G$  mit Häufungspunkt und  $f(z_n) = 0$  für alle  $n$ , so ist  $f(z) \equiv 0$ .
- c) Ist  $(z_n)_n$  eine Folge in  $G$  mit Häufungspunkt in  $G$  und  $f(z_n) = 0$  für alle  $n$ , so ist  $f(z) \equiv 0$ .
- d) Ist  $f$  auf  $G$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.
- e) Ist  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $f$  auf  $G$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.
- f) Ist  $G = \mathbb{C}$  und  $f$  auf  $G$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay$$

an und untersuchen Sie, ob es stabile Lösungen besitzt. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung  $y(0) = (2, 0)^T$  genügt, und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3:**

- a) Sei  $g$  eine positive differenzierbare Funktion. Welche Stammfunktion hat dann die Funktion  $g'/g$ ?
- b) Bestimmen Sie die Lösung  $y = \varphi(x)$  des Anfangswertproblems

$$y' = -xy \ln y, \quad y(0) = e$$

und deren maximalen Definitionsbereich. Zeigen Sie, dass die Lösung auf diesem Definitionsbereich der Abschätzung  $1 < \varphi(x) \leq e$  genügt, und skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $\varphi$ .  
(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$  im Ringgebiet  $1 \leq |z| \leq 2$ . Sind darunter auch reelle Nullstellen?

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  und  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $|f(z) - z| < |z|$  auf dem Rand von  $\mathbb{D}$ . Beweisen Sie, dass  $|f'(1/2)| \leq 8$  gilt, und dass  $f$  in  $\mathbb{D}$  genau eine Nullstelle hat.

(6 Punkte)