Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge $K \subset \mathbb{R}$, die genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ enthält, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$ gegen eine reelle Zahl konvergiert.

b) Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne $\gamma_a : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ den durch $\gamma_a(t) := a + 2e^{it}$ beschriebenen Weg. Bestimmen Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1-2z^2}{z^3} dz$$

für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$.

Aufgabe 2 (1+1+4=6 Punkte)

Bezeichne $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq -x^2\}$ den Definitionsbereich der Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + y^2 + 2y$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f ein globales Minimum besitzt.

c) Bestimmen Sie das globale Minimum von f sowie alle Stellen in D, bei denen dieses angenommen wird.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cdot \cos t\,, \qquad x(0) = c\,,$$

für $c \in [0, \infty[$ diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

a) Bestimmen Sie für jedes $c > 1$ eine globale Lösung x_c des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist diese deren einzige globale Lösung?

b) Geben Sie für jedes $0 \leq c \leq 1$ jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an (eine Begründung ist nicht verlangt).

Aufgabe 4 (2+4=6 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichne $H := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $S := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 <\ \mathrm{Re}(z) < 1\}$ einen Streifen in $\mathbb{C}$.

a) Geben Sie (mit Begründung) eine holomorphe, bijektive Abbildung $g : S \to H$ an.

b) Bestimmen Sie eine holomorphe, bijektive Abbildung $f : S \to S$ mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 5 (2+2+2=6 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder ein Beispiel an (ohne Begründung) oder begründen Sie, warum es ein solches nicht geben kann.

a) Eine holomorphe Funktion $h : \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to 0} h(z)\sqrt{|z|} = 1$.

b) Eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften (i)–(iii):

(i) $F(0) = 0$
(ii) Die Realteile der Eigenwerte der Ableitung $DF(0)$ sind kleiner oder gleich 0.
(iii) 0 ist keine stabile Ruhelage der Differentialgleichung $y' = F(y)$.

c) Ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Differentialgleichung $y' = P(y)$ keine globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.