Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

(6 Punkte) Sei $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_2 > 0\}$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int_\Omega x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \, dx$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 2

(2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Hinweis: Überlegen Sie zunächst, warum die Singularität bei $z = 0$ hebbar ist.

b) Es sei $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von Log mit Entwicklungspunkt $e^{3\pi i/4}$.

Aufgabe 3

(3+3 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2iz}}{\cosh z} \, dz \,,$$

wobei Γ der Weg ist, der das Rechteck

$$R = \{z \mid -n \leq \operatorname{Re} z \leq -n \quad \text{und} \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq n\pi\}$$

im Gegenuhrzeigersinn umschließt.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{\cosh x} \, dx$$

unter Verwendung von (a) und stellen Sie es als Reihe dar. Begründen Sie die Zwischenschritte.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

(2+4 Punkte) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 + y^2)\sqrt{|y|}\\ \dot{y} &= \frac{1}{y^{42}+1} + \exp(t).\end{aligned}$$

a) Begründen Sie, warum zu jedem Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung des Systems existiert.

b) Sei $J \subset \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. Zeigen Sie, dass $\sup J \leq 1$ gilt, und untersuchen Sie das Verhalten von $(x(t), y(t))$ bei $t \nearrow \sup J$.
Hinweis: Bestimmen Sie als Vorüberlegung explizit die Lösung z zur Differentialgleichung $\dot{z} = z^2$ mit Anfangswert $z(0) = 1$ und überlegen Sie sich das zugehörige maximale Existenzintervall.

Aufgabe 5

(2+1+1+2 Punkte) Gegeben sind drei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n, g_n, h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \sqrt{x}\, e^{-nx}, \quad g_n(x) = n\sqrt{x}\, e^{-nx}, \quad h_n(x) = n^2\sqrt{x}\, e^{-nx}.$$

Entscheiden Sie jeweils (mit Begründung), welche dieser drei Folgen

a) beschränkt in $C^0([0,1])$ ist,

b) punktweise konvergiert,

c) gleichmäßig konvergiert,

d) konvergentes Integral hat (d. h. entscheiden Sie, ob $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $\int_0^1 g_n(x)\,dx$ beziehungsweise $\int_0^1 h_n(x)\,dx$ konvergieren).