Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x''(t) = -4x'(t) - 5x(t) + \sin(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob es unter diesen Lösungen solche gibt, die zudem den Bedingungen $x(0) = x(\pi) = 0$ genügen.

(b) Bestimmen Sie die maximale Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, des Anfangswertproblems

$$x^2 y'(x) = y(x)^2 + xy(x)\,, \qquad y(-2) = 2\,.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass eine solche eindeutig bestimmte maximale Lösung existiert. Vergessen Sie nicht, den Definitionsbereich I der maximalen Lösung anzugeben. Die Substitution $z(x) := y(x)/x$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe 2:

(2+2+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$,

(ii) $f(-2) > 0$, $f(0) > 0$ und $f(2) < 0$.

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= \xi \qquad (\xi \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Sie dürfen ohne Begründung von der Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung von $(*)$ ausgehen.

(a) Bestimmen Sie alle $\xi \in \mathbb{R}$, für die die maximale Lösung von $(*)$ streng monoton wächst und alle $\xi \in \mathbb{R}$, für die die maximale Lösung von $(*)$ streng monoton fällt. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ enthält das Existenzintervall $I(\xi)$ der maximalen Lösung von $(*)$ das Intervall $[0, \infty)$.

Fortsetzung nächste Seite!

(c) Zeigen Sie, dass $x = 1$ ein asymptotisch stabiler und $x = -1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist.

Aufgabe 3:

(2+1+1+2 Punkte)

Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\},$$

betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{\sin z}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

(b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

(c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion auf Ω?

(d) Bestimmen Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion

$$F(z) := f(z) + c_1 \frac{1}{z - a_1} + c_2 \frac{1}{z - a_2}$$

auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 4:

(3+3 Punkte)

Es sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

(a) (i) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und f habe in $z = 0$ eine Polstelle. Zeigen Sie: Es existiert ein $R \in [0, \infty)$ derart, dass

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \subseteq f(\mathbb{D}\backslash\{0\}).$$

Hinweis: Betrachten Sie $1/f$.

(ii) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und es existiert ein $R \in [0, \infty)$ derart, dass

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \subseteq f(\mathbb{C}\backslash\{0\}).$$

Hat f dann eine Polstelle in $z = 0$?

(b) Es sei $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph in $\mathbb{D}$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Weiter seien $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$, $w_1 \neq w_2$, Nullstellen von f und

$$g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{w_1 - z}{1 - \overline{w_1} z} \cdot \frac{w_2 - z}{1 - \overline{w_2} z}.$$

Zeigen Sie:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{D}.$$

Hinweis: Betrachten Sie f/g.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
(3+3 Punkte)

(a) Es sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|^{1/2}$. Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(b) Es sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beschränkte offene Menge und $u : \overline{E} \to \mathbb{R}$ eine stetige und in E zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in E,$$

so existiert ein $a \in \partial E$ derart, dass

$$u(a) = \max_{x \in \overline{E}} u(x)\,.$$