Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
(1,5+2+2,5 Punkte)

Es sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(z) = z/(1-z)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $g(z) = 1/(1-z)^2$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}} = 0.$$

Aufgabe 2:
(1+1+2+2 Punkte)

a) Leiten Sie die Werte von $\sin(\pi/3), \cos(2\pi/3)$ und $\sin(2\pi/3)$ aus der Identität $\cos(\pi/3) = 1/2$ ab.

b) Geben Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^4 + z^2 + 1$ in Polardarstellung (d. h. in der Form $r\exp(i\phi)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\phi \in [0, 2\pi[$) an.

c) Sei N die Nullstellenmenge von $p(z)$. Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z^2 - z + 1}{p(z)},$$

und geben Sie im Falle eines Pols die Ordnung und das Residuum an.

d) Leiten Sie ausgehend vom Residuensatz eine Formel für das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

ab. Begründen Sie hierbei auch, wieso das Integral existiert.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
(4+2 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Für die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ darf ohne Begründung angenommen werden, dass zu jedem Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung existiert. Für $x_0 \in D$ bezeichne $\varphi(\cdot; x_0)$ die maximale Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$.

a) Sei $0 \in D$ ein Fixpunkt der Differentialgleichung, der attraktiv ist (d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x_0 \in D$ mit $|x_0| < \varepsilon$ die Aussage $\lim_{t\to\infty} \varphi(t; x_0) = 0$ gilt). Sei $x^* \in D$ mit $\lim_{t\to\infty} \varphi(t; x^*) = 0$. Zeigen Sie: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, so gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{t\to\infty} \varphi(t; x_k) = 0$ für alle $k \geq K$.

b) Zeigen Sie, dass die Behauptung aus a) falsch wird, wenn man statt der Attraktivität von 0 nur voraussetzt, dass 0 ein Fixpunkt ist. Verwenden Sie hierzu das Beispiel

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Aufgabe 4:
(2+2+2 Punkte)

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Im Folgenden bezeichnet $DT(x)$ die Jacobimatrix von T im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt von g ist ein Punkt, in dem der Gradient verschwindet.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ T$ eine konstante Funktion und hat g keine kritischen Punkte, so gilt $\det(DT(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Zeigen Sie: Ist $g \circ T$ eine konstante Funktion und sind die kritischen Punkte von g isoliert, so gilt $\det(DT(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Geben Sie ein Beispiel für stetig differenzierbare Abbildungen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

   i) g keine kritischen Punkte hat,
   ii) $\det(DT(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$,
   iii) $g \circ T$ keine konstante Funktion ist.

   Weisen Sie dabei nach, dass für dieses Beispiel Eigenschaften i), ii) und iii) erfüllt sind.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
(0,5+1,5+2+2 Punkte)

Für eine reelle Zahl r ist die Aufrundung $\lceil r \rceil$ definiert als $\lceil r \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq r\}$. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\lceil 1/x^2 \rceil}}, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.

b) Entscheiden Sie für jedes $x > 0$, ob f in x stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ gilt:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq f(x) \leq x.$$

d) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, in denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.