Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
(1+2+3 Punkte)

Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 2e^{it}$. Bestimmen Sie:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z) - 1}{z^2} dz$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z+i)^4} dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz.$

Hinweis zu c): Betrachten Sie die Reihenentwicklung des Integranden.

Aufgabe 2:
(2+4 Punkte)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = 3\sqrt{xt}\,, \quad t, x \in\,]0, \infty[\,.$$

Überprüfen Sie diese auf lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen mit Anfangswerten im offenen ersten Quadranten $]0, \infty[\times]0, \infty[$

b) Zeigen Sie, dass die Eindeutigkeit der Lösungen nicht mehr gültig ist, sobald man den ersten Quadranten verlässt.

Geben Sie dazu zwei verschiedene, auf $\mathbb{R}$ globale Lösungen für das Anfangswertproblem $x(0) = 0$ an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
(1+3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass
$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0 \tag{1}$$
eine exakte Differentialgleichung ist.

b) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems
$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0, \quad x(0) = 1. \tag{2}$$
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D Ihrer Lösung an.

c) Zeigen Sie, dass für jedes $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ und jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ von
$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0, \quad x(\tau) = \xi \tag{3}$$
sowohl I als auch $\lambda(I)$ beschränkt ist.

Aufgabe 4:
(2+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2+1}$.

a) Zeigen Sie, dass der Limes $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx$ existiert. Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mit Hilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, dass die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Aufgabe 5:
(2+2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine auf $D := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ holomorphe Funktion an, die der folgenden Eigenschaft genügt:
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$
Begründen Sie, dass es nur eine einzige Funktion gibt, die dieser Eigenschaft genügt.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt entweder $f \equiv 0$ oder dann hat f bei a eine wesentliche Singularität.

c) Geben Sie nun zwei auf $\mathbb{C}\backslash\{-1; 0\}$ definierte holomorphe Funktionen an, die die in (a) genannte Eigenschaft erfüllen, d. h.
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$