Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(a) Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 2 konvergiert. Zeigen Sie folgende zwei Aussagen anhand der Definition für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge:

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : \; a_n > 1$.

(ii) Die Folge $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent.

(b) In dieser Teilaufgabe heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cool im Punkt* $a \in \mathbb{R}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : \big(|x-a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\big).$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f cool im Punkt $a \implies f$ stetig im Punkt a.

(ii) f stetig im Punkt $a \implies f$ cool im Punkt a.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien $U := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ und $V := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

(a) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h\colon U \to V$.

(b) Konstruieren Sie eine Stammfunktion $f\colon V \to \mathbb{C}$ der Funktion $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ mit $f(i) = i$. Entscheiden Sie, ob f eindeutig bestimmt ist.

(c) Sei $\gamma\colon [0,1] \ni t \mapsto t + i\cos(\frac{\pi}{2}t)$. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ sowie seinen Real- und Imaginärteil.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie $\sup\{|\cos z| \mid z \in \mathbb{C}\}$,

(a) indem Sie einen geeigneten Satz der Funktionentheorie anwenden, also insbesondere ohne die Funktionswerte von $|\cos z|$ zu betrachten,

(b) indem Sie für $R > 0$ zeigen, dass die Funktion $f(z) = |\cos z|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ ihr Maximum annimmt, und diesen Wert sowie sein Verhalten für $R \to \infty$ bestimmen.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die maximale Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + e^{x_2} x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1\, x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2\, x_3 \end{aligned}$$

zu folgender Anfangsbedingung:

$$\text{(a)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass in den Anfangsdaten jeweils eine Komponente gleich 0 ist.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (1 - x^2)\, e^{\sin x}, \quad x(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie für die Lösung x aus (a), dass die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren, und bestimmen Sie diese.

(c) Bestimmen Sie für die Lösung x aus (a) das Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$.

(2+2+2 Punkte)