Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Es sei $D_R = [0,1] \times [0,R]$ für $R > 1$ und $f\colon D_R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x(1-x)ye^{-y} \qquad \text{für alle } (x,y) \in D_R.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen das globale Maximum angenommen wird.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$I_R := \int_{D_R} f(x,y)\, d(x,y)$$

und den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei

$$f(z) = \frac{z-\pi}{\sin z} + z\exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und jeweils deren Typ.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz.$$

(4+2 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} u''(t) - u(t) &= t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 1. \end{aligned}$$

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $y_0 \in (0,1)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y(y-1)g(y), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(t) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,\infty)$ hat.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

Konstruieren Sie eine nicht-konstante, stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ jeweils die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Funktion $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(x) := x_1^2 + x_2^2$ ist eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) der Differentialgleichung.

(b) Zusätzlich zu der Eigenschaft in (a) besitzt die Differentialgleichung die stationären Lösungen $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ und keine weiteren.

(c) Zusätzlich zu den Eigenschaften in (a) und (b) besitzt die Differentialgleichung zwei Lösungen $x_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x_+(t) = (1,0) = \lim_{t\to-\infty} x_-(t) \quad \text{und} \\ \lim_{t\to-\infty} x_+(t) = (-1,0) = \lim_{t\to\infty} x_-(t). \end{aligned}$$

Weisen Sie in jedem Aufgabenteil nach, dass die von Ihnen konstruierte Funktion f diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

(1+2+3 Punkte)