Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2024**	**43910**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Differential- und Integralrechnung**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(a+b)| \leq |\sin(a)| + |\sin(b)|.$$

b) Beweisen Sie zum Beispiel unter Verwendung von Teilaufgabe a) die folgende Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\sin(nx)| \leq n \cdot |\sin(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = n\sqrt{x}e^{-nx}, \qquad x \in [0,1].$$

a) Bestimmen Sie für jedes $x \in [0,1]$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

b) Bestimmen Sie das globale Maximum

$$a_n := \max(f_n([0,1])), \qquad n \geq 1,$$

von f_n.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Aufgabe 3:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei I_n definiert durch

$$I_n := \int_0^1 x^n \cdot e^{-x^2}\, dx.$$

a) Bestimmen Sie I_1.

b) Beweisen Sie

$$I_n = \tfrac{1}{n+1}\left(e^{-1} + 2 \cdot I_{n+2}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie I_5.

Aufgabe 4:

Sei

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und sei $f : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot e^{xy}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass für $(x, y) \in K$ gilt
$$0 < e^{xy} < 3.$$

b) Begründen Sie, dass f auf K ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von K.

d) Bestimmen Sie das globale Maximum von f auf K und eine dazugehörige Maximalstelle.

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems
$$y''(x) = y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{$*$}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Potenzreihe $(*)$ das Anfangswertproblem aus Teilaufgabe a) löst.

d) Folgern Sie, dass für ψ aus Teilaufgabe a)
$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.