Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass
$$|\arctan(x)| \leq |x|$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Sei $x_0 \geq 0$ und sei $x_{n+1} = x_n - \arctan(x_n)$ für $n \geq 0$.

i) Zeigen Sie, dass $x_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\text{a)} \quad \lim_{x \searrow 0} x^{\frac{\cos(x)}{\ln(x)}} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to \infty} x\left(\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = xe^x.$$
Für $a \in \mathbb{R}$ sei T_a die Tangente an den Graphen von f, die durch $(a, f(a))$ verläuft.

a) Bestimmen Sie sämtliche Punkte $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass T_a den Punkt $(0, -e^a)$ enthält.

b) Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 x^{n+1} e^{nx}\, dx + \int_0^1 \frac{n+1}{n} x^n e^{nx}\, dx = \frac{e^n}{n}.$$

c) Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, unter Verwendung der Monotonie des Integrals, dass
$$\int_0^1 (f(x))^n\, dx \geq \frac{e^n}{2n+1}.$$

Aufgabe 4:

Sei

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + 4y^2 \leq 1, \, y \geq 0\}$$

und sei $f : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^3 - x + 4y^2.$$

a) Skizzieren Sie die Menge K und begründen Sie, dass f globale Extremstellen besitzt.

b) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f auf K.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

erfüllt.