Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mithilfe vollständiger Induktion.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie für jedes $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

gilt.

Aufgabe 2:

Es sei die Funktion

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x},$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen f streng monoton ist, und untersuchen Sie f auf Nullstellen und globale Extremstellen.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

und bestimmen Sie die Wertemenge $f(]0, +\infty[)$ von f.

c) Zeigen Sie, dass es genau ein Paar (m, n) natürlicher Zahlen mit

$$0 < m < n \qquad \text{und} \qquad m^n = n^m$$

gibt.

Aufgabe 3:

Es sei die Funktion

$$f :]-2,\ 3[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - x - 6},$$

gegeben; dabei bezeichne G_f den Graphen von f.

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F :]-2,\ 3[\to \mathbb{R}$ von f mithilfe einer Polynomdivision und einer Partialbruchzerlegung.

b) Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen den beiden Nullstellen von f eingeschlossen wird, und geben Sie diesen in der Form

$$A = p + q \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

mit rationalen Zahlen $p,\ q \in \mathbb{Q}$ an.

Aufgabe 4:

Auf der abgeschlossenen Halbkreisscheibe

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{und} \quad y \geq 0\right\}$$

sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + 6\,y - 2\,y^2,$$

gegeben. Bestimmen Sie alle globalen Minimalstellen sowie alle globalen Maximalstellen von f auf D.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Lösungsfunktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 3,$$

welche an der Stelle $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle mit $\varphi(0) = 1$ besitzen.