Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2023**	**43910**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Differential- und Integralrechnung**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Schreiben Sie die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x^2 - 1| \ < \ \frac{3}{2}x\}$$

als (Vereinigung von) Intervall(en).

Aufgabe 2:
Es seien a, b, c beliebige reelle Zahlen. Weiter seien die Funktionen

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

sowie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin(p(x))$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f unendlich viele Nullstellen besitzt.

b) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Menge

$$f([1, \infty[).$$

Aufgabe 3:
Für $t \in \mathbb{R}$ werde die Funktion $f_t \colon]-\infty, \pi[\to \mathbb{R}$ betrachtet, die durch

$$f_t(x) = \begin{cases} (\sin(x))^x, & \text{für} \quad x \in]0, \pi[, \\ x + t, & \text{für} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

definiert ist. Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f_t in 0 stetig ist.

Aufgabe 4:
Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \cosh(x) \leq y \leq \cosh(2)\}$$

und die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 2y - e^x$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Menge K und weisen Sie nach, dass K kompakt ist.

b) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum von f auf K.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die beiden folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} &(D1) \quad y'(x) + \frac{y(x)}{1+x} + (1+x)(y(x))^4 = 0, \qquad y(0) = 1, \\ &(D2) \quad z'(x) - \frac{3z(x)}{1+x} - 3(1+x) = 0, \qquad z(0) = 1. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: Ist $z : I \to]0, \infty[$ eine Lösung von $(D2)$, so ist $y := z^{-\frac{1}{3}}$ eine Lösung von $(D1)$.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung von $(D2)$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $(D1)$.