Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = a_n + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Zeigen Sie:

a) $2 \leq a_n$ für alle $n \geq 2$.

b) $a_n < 4\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

**Aufgabe 2:**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte

$$f'(x) > 0 \quad \text{und} \quad f(-x) = -f(x).$$

a) Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f\left((-1)^k\right) = (-1)^k f(1).$$

b) Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left((-1)^k\right) f\left(\frac{1}{k}\right)$$

ist konvergent.

c) Geben Sie ein stetig differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$f'(x) > 0 \quad \text{und} \quad f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ an, so dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^2}$$

konvergent ist.

**Aufgabe 3:**
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\cos(x) + 2)^{x^6 + x^3 - 2}.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Gleichung

$$f(x) = 1$$

erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x) = 3^{2023}$$

unendlich viele reelle Lösungen hat.

**Aufgabe 4:**
Zu $b \geq 1$ sei

$$R_b = [-1, b] \times [-1, 1].$$

Weiter sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + e^x y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $b \geq 1$, so dass das Maximum von $f$ auf $R_b$ und das Minimum von $f$ auf $R_b$ den Abstand $2 + e$ haben.

**Aufgabe 5:**
Es sei $y$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $y(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(1 + x^2)y'(x) = y(x)$$

erfüllt. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to \infty} y'(x).$$