Aufgabe 3:
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\cos(x) + 2)^{x^6+x^3-2}.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Gleichung

$$f(x) = 1$$

erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x) = 3^{2023}$$

unendlich viele reelle Lösungen hat.

Aufgabe 4:
Zu $b \geq 1$ sei

$$R_b = [-1, b] \times [-1, 1].$$

Weiter sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + e^x y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $b \geq 1$, so dass das Maximum von f auf R_b und das Minimum von f auf R_b den Abstand $2 + e$ haben.

Aufgabe 5:
Es sei y eine stetig differenzierbare Funktion mit $y(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(1 + x^2)y'(x) = y(x)$$

erfüllt. Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\infty} y'(x).$$

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Die drei Geraden $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ und der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$$

schließen im $\mathbb{R}^2$ ein Kompaktum K ein. Berechnen Sie die Länge des Randes ∂K von K.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : [0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \left(t^2 - 11t + 25\right)\exp(-t)$$

ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt und bestimmen Sie alle Punkte, in denen g ihre globalen Extrema annimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \left(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 11x^2 - 11y^2 + 25\right) \cdot \exp\left(-x^2 - y^2\right)$$

sowohl ein globales Maximum als auch ein globales Minimum besitzt. Bestimmen Sie ferner alle Punkte, in denen f ihr globales Maximum annimmt, sowie alle Punkte, in denen f ihr globales Minimum annimmt.

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die

$$f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(0) < 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie: Es gibt zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und $f'(a) = 0 = f'(b)$.

b) Geben Sie (mit vollständiger Begründung) ein konkretes Beispiel einer solchen Funktion f an.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die maximale reellwertige Lösung (mit Angabe des maximalen Existenzintervalls) des Anfangswertproblems

$$\big(2y(x) - 4\big) \cdot y'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad y(-1) = \alpha$$

in folgenden zwei Fällen:

(i) $\alpha = 1$.

(ii) $\alpha = 4$.

Aufgabe 5:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für ein $d \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \big|x^d \cdot f(x)\big| = 1.$$

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $d \in \mathbb{N}_0$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

auf absolute Konvergenz.