

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sowie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty.$$

Man zeige, dass die Graphen von f und g einen Schnittpunkt besitzen.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f :]2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a) Man zeige, dass f auf $]2, \infty[$ monoton fällt und nur positive Werte annimmt.
- b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f .
- c) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

mittels des Integralvergleichskriteriums auf Konvergenz.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = x^2(x^2 + y^2 - 2).$$

- a) Man bestimme die Nullstellen von f und skizziere die Bereiche des \mathbb{R}^2 , in denen f positive bzw. negative Funktionswerte besitzt.
- b) Man bestimme alle lokalen Extremstellen von f .

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Kurve $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (t^3 - 3t + 2, 12 - 3t^2)$$

mit der Bildmenge

$$K = \{\gamma(t) : t \in [1, 2]\}.$$

a) Man berechne

$$\gamma(1), \quad \gamma(2), \quad \gamma'(1), \quad \gamma'(2),$$

und skizziere die Bildmenge K .

b) Man bestimme die Bogenlänge von K .

Aufgabe 5:

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$

mit

$$y(0) = y'(0) = 0.$$