Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Man zeige:

a) Für alle Startwerte $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

b) Für alle Startwerte $a_0 \in [0,1]$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Grenzwert 1.

c) Für alle Startwerte $a_0 \notin [0,1]$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Aufgabe 2

a) Man zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!} x^{3n} \qquad (*)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Man zeige, dass die Grenzfunktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Potenzreihe (*) das Anfangswertproblem

$$y'''(x) = 8\,y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

löst.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\pi - x)\cos(x).$$

a) Man bestimme die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt

$$a = \frac{\pi}{2}.$$

c) Man zeige für alle

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \le \frac{\pi^3}{64}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Man zeige, dass eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

weder surjektiv noch injektiv sein kann.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - xy - x.$$

a) Man bestimme alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

b) Man bestimme alle globalen Extremstellen der Funktion f auf dem Rechteck

$$R = [-1, 1] \times [-1, 2].$$